ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.А. Дегтярев, Т.В. Трушевская

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

В работе исследуется сходимость двух разностных схем для нелинейного уравнения теплопроводности, описывающего процесс теплового взаимодействия слабо поглощающего оптического элемента с инфракрасным лазерным излучением. В результате теоретического исследования сходимости определены порядки сходимости относительно шагов дискретизации для каждой из двух схем. В результате вычислительных экспериментов установлено, что фактические порядки сходимости соответствуют теоретическим. Исследование скорости сходимости сеточного решения проведено в равномерной норме.

Ключевые слова: Ключевые слова: уравнение теплопроводности, функция поглощательной способности, оптический элемент, погрешность аппроксимации, устойчивость, исследование сходимости, равномерная норма.

Введение

Исследование погрешности разностного решения является важной задачей при разработке программ численного моделирования различных процессов. На практике часто возникает вопрос о сходимости методической погрешности приближённых решений, найденных конечно-разностным методом [1], к решению исходной краевой задачи.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования методической погрешности конечно-разностного решения нелинейного уравнения теплопроводности, описывающего термодинамическое поле в тонком оптическом элементе, работающем на пропускание инфракрасного лазерного излучения [2, 3]. Поскольку задача нелинейная, экспериментальное исследование сходимости схем на измельчающих сетках представляет практический интерес.

1. Теоретические основы

Термодинамический процесс в тонкой плоскопараллельной оптической пластине, облучаемой лазерным пучком света, описывается следующей математической моделью [3]:

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2\alpha}{kl}u\right]+\dfrac{A(u)}{l}I(r); \\ 0<r\le R, 0\le t\le T; \\ c\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\left[2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2\alpha}{kl}u\right]+\dfrac{A(u)}{l}I(r); \\ r=0, 0\le t\le T; \\ u\big|_{t=0}=0; 0\le r\le R; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0; 0\le t\le T, \end{cases} \qquad (1)$$

где u – превышение температуры оптического элемента над температурой окружающей среды, α – коэффициент теплообмена между гранями оптической пластины и окружающей средой, c – объёмная теплоёмкость материала диска, k – коэффициент теплопроводности, l – толщина диска, R – радиус диска, T – длина временного интервала, $A(u)$ – функция поглощательной способности, $I(r)$ – интенсивность излучения лазера, задаваемая формулой:

$$I(r) = \frac{P}{\pi a^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{a} \right)^2 \right),$$

P – мощность лазерного пучка, a – эффективный радиус пучка.

Особенностью данной математической модели является нелинейность уравнения теплопроводности. Эта нелинейность связана с «интерференционными эффектами» [2], возникающими в результате прохождения лазерного излучения через слабо поглощающую пластину. Поглощательная способность пластины очень чувствительна к тепловым изменениям коэффициента преломления и толщины оптической пластины, которые возникают при поглощении материалом пластины части энергии излучения. Поглощательная способность является периодической функцией температуры [2].

Для численного решения нелинейной краевой задачи (1) были использованы явная и неявная разностные схемы на равномерной сетке с узлами (r_i, t_k), где $r_i = ih_r$, $i = 0,...I$, $t_k = kh_t$, $k = 0,...K$, I – количество разбиений по радиусу, $h_r = \frac{R}{I}$ – шаг разбиения по радиусу, K – количество интервалов дробления по времени, $h_t = \frac{T}{K}$ – шаг разбиения по времени.

Явная схема имеет вид (2). Неявная схема определяется системой дискретных отношений (3). Обозначение u_i^k имеет смысл точного решения разностной задачи в узле (i,k).

В результате теоретического исследования установлен факт безусловной устойчивости неявной схемы. Явная же схема устойчива при условии: $1 - 4\frac{kh_t}{ch_r^2} \geq 0$. Данные разностные схемы аппроксимируют задачу (1) с погрешностью $O(h_t, h_r^2)$.

$$\begin{cases}
c\dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = k\left[\dfrac{1}{ih_r} \dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2} - \dfrac{2\alpha}{kl} u_i^k \right] + \\
+\dfrac{1}{l} A\left(u_i^k\right) I\left(ih_r\right); i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K-1}; \\
c\dfrac{u_0^{k+1} - u_0^k}{h_t} = k\left[2\dfrac{2u_1^k - 2u_0^k}{h_r^2} - \dfrac{2\alpha}{kl} u_0^k \right] + \\
+\dfrac{1}{l} A\left(u_0^k\right) I(0); i = 0, k = \overline{0, K-1}; \\
u_i^0 = 0; i = \overline{0, I}, k = 0; \\
\dfrac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_r} = 0; i = I, k = \overline{0, K}.
\end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} c\dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = k\left[\dfrac{1}{ih_r}\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2} - \dfrac{2\alpha}{kl}u_i^k\right] + \\ +\dfrac{1}{l}A\left(u_i^k\right)I\left(ih_r\right); i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ c\dfrac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h_t} = k\left[2\dfrac{2u_1^k - 2u_0^k}{h_r^2} - \dfrac{2\alpha}{kl}u_0^k\right] + \\ +\dfrac{1}{l}A\left(u_0^k\right)I\left(0\right); i = 0, k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = 0; i = \overline{0, I}, k = 0; \\ \dfrac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_r} = 0; i = I, k = \overline{0, K}. \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку обе схемы, аппроксимирующие исходную задачу, являются устойчивыми, то на основании теоремы о сходимости можно утверждать, что разностные решения, полученные с помощью одной и другой схем, сходятся к решению исходной задачи.

2. Экспериментальное исследование сходимости

Проведём планирование вычислительного эксперимента для определения фактической скорости сходимости разностных схем. Учитывая порядки сходимости, запишем связь между численным и точным решением в следующем виде:

$$u_{h_t h_r} = \left[u\right]_{h_t h_r} + Ah_t + Bh_r^2 + O_1\left(h_t^2, h_r^4\right),$$

где $u_{h_t h_r}$ – разностное решение, $\left[u\right]_{h_t h_r}$ – точное решение исходной задачи в узлах сетки, A и B – некоторые величины. Предположим, что с измельчением сетки величины A и B меняются несущественно. Если получить разностное решение на сетке с шагами $\frac{h_t}{2}$ и h_r, то связь между разностным и точным решением запишется так:

$$u_{\frac{h_t}{2}h_r} = \left[u\right]_{\frac{h_t}{2}h_r} + A\frac{h_t}{2} + Bh_r^2 + O_2\left(h_t^2, h_r^4\right).$$

Имея два разностных решения $u_{h_t h_r}$ и $u_{\frac{h_t}{2}h_r}$, найдём величину:

$$\Delta u_{h_t h_r} = \max_{(t_k, r_i)}\left|u_{h_t h_r} - u_{\frac{h_t}{2}h_r}\right| = \left|A\right|\frac{h_t}{2} + O_3\left(h_t^2, h_r^4\right). \tag{4}$$

Очевидно, что при измельчении сетки должно быть справедливо следующее приближённое равенство:

$$m_{h_t h_r} = \frac{\Delta u_{h_t h_r}}{\Delta u_{\frac{h_t}{2}h_r}} \cong 2\ .$$

Иначе говоря, если проводить измельчение шага по переменной t в два раза и сохранять мелкость сетки по r, то величина $m_{h_t h_r}$ должна приближаться к числу 2.

Если проводить измельчение шага по переменной r в два раза, а шаг по переменной t зафиксировать, то при измельчении сетки по радиусу должно быть справедливо следующее равенство:

$$n_{h_t h_r} = \frac{\Delta u_{h_t \frac{h_r}{2}}}{\Delta u_{h_t h_r}} \cong 4,$$

где величина $\Delta u_{h_t h_r}$ определяется формулой:

$$\Delta u_{h_t h_r} = \max_{(t_k, r_i)} \left| u_{h_t h_r} - u_{\frac{h_t}{2} h_r} \right| = |B| \left(\frac{h_r}{2} \right)^2 + O_4\left(h_t^2, h_r^4\right). \qquad (5)$$

Для исследования скорости убывания методической погрешности была проведена серия вычислительных экспериментов. Расчёты проводились на тестовом примере при следующих значениях параметров: $R = 3$ см, $T = 30$ °C, $l = 1$ см, $P = 30$ Вт, $a = 0,6$ см, $k = 0,59 \left[\frac{Вт}{см \cdot К} \right]$,
$c = 1,65 \left[\frac{Дж}{см^3 \cdot К} \right]$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \left[\frac{Вт}{см^2 \cdot К} \right]$.

Для расчёта поглощательной способности были использованы значения параметров соответствующие элементу, выполненному из германия.

Наряду с исходной нелинейной задачей, рассмотрена так же линейная задача, в которой поглощательная способность задавалась постоянной величиной, то есть функция $A(u)$ предполагалась независимой от температуры u.

В таблицах 1 и 2 приведены типичные результаты вычислительных экспериментов по определению значений величин $m_{h_t h_r}$ и $n_{h_t h_r}$ на измельчающихся сетках.

Результаты, приведённые в таблице 1, получены при значении $I = 5$. Из таблицы видно, что величина $m_{h_t h_r}$ с измельчением сетки становится очень близкой к гипотетическому значению равному 2. Это имеет место, как для линейной, так и для нелинейной задач, что подтверждает первый порядок сходимости по h_t.

Табл. 1. Зависимость величины $m_{h_t h_r}$ от количества шагов по времени

K	$m_{h_t h_r}$			
	Нелинейный случай		Линейный случай	
	Явн. сх.	Неяв. сх.	Явн. сх.	Неяв. сх.
800	1,8	1,738	2,126	1,92
1600	1,973	1,865	2,054	1,957
3200	1,985	1,928	2,025	1,977
6400	1,994	1,966	2,012	1,988
12800	1,997	1,983	2,006	1,994

Табл. 2. Зависимость величины $n_{h_t h_r}$ от количества шагов по радиусу

I	$n_{h_t h_r}$			
	Нелинейный случай		Линейный случай	
	Явн. сх.	Неяв. сх.	Явн. сх.	Неяв. сх.
4	5,752	5,753	6,08	6,08
8	1,716	1,717	10,727	10,726
16	1,414	1,418	2,421	2,421
32	2,092	2,097	3,673	3,673
64	3,336	3,368	3,908	3,908
128	3,913	3,903	3,973	3,973
256	3,988	3,967	3,992	3,992

Результаты, приведённые в таблице 2, получены при значении $K = 400000$ для явной схемы и $K = 4000$ для неявной. Разница в количествах интервалов дробления временного промежутка объясняется тем, что явная схема является условно устойчивой и предъявляет жёсткие требования к малости шага по времени. Из таблицы видно, что величина $n_{h_t h_r}$ с измельчением сетки становится очень близкой к гипотетическому значению равному 4. Это подтверждает квадратичную сходимость как явной, так и неявной схем по шагу h_r, что вполне согласуется с результатами теоретического исследования.

Следует отметить, что для нелинейной задачи квадратичная сходимость по шагу h_r получает экспериментальное подтверждение на сетках лишь при $I \geq 128$. В то же время, для линейной задачи это подтверждение обнаруживается при $I \geq 32$.

Заключение

Из полученных численных результатов видно, что явная и неявная разностные схемы сходятся как в линейном, так и нелинейном случаях, причём порядки сходимости относительно шагов h_r и h_t близки к теоретическим.

Отметим, что по результатам вычислительных экспериментов можно приблизительно вычислить значения неизвестных A и B с использованием формул (4) и (5). Так для явной схемы: $|A| \approx 1,45$ и $|B| \approx 169,66$, а для неявной: $|A| \approx 4,41$ и $|B| \approx 167,48$. Значения этих величин могут быть использованы для прогнозирования погрешности на конкретной выбранной сетке. С другой стороны, знание параметров A и B облегчает решение задачи выбора таких шагов сетки, которые обеспечивают получение разностного решения с заданной точностью.

Литература

1. Самарский, А.А. Уравнения математической физики / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 552 с.
2. Карлов, Н.В. Интерференционные эффекты при измерении коэффициентов поглощения прозрачных материалов / Н.В. Карлов, Г.П. Кузьмин, Е.В. Сисакян // Квантовая электроника. –1977. – Т. 4, № 8. – С. 1816-1818.
3. Дегтярев, А.А. Применение метода вычислительного эксперимента для исследования влияния параметров правой части нелинейного уравнения теплопроводности на его решение / А.А. Дегтярев, М.В. Силакова // Международная конференция с элементами научной школы для молодёжи (ПИТ-2010), 29.09.-01.10.2010 г., Самара, СГАУ, 2010 г., С. 410-414.